OPTION M'

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1982

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Pour toute série S à termes complexes a_n $(n \in \mathbb{N})$, on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la somme partielle de rang n et $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$ la moyenne arithmétique des $n+1$ premières sommes partielles.

Dans l'ensemble des séries S, on envisage les sous-ensembles :

$\mathcal{S}_1$ constitué des séries S convergeant dans $\mathbb{C}$;

$\mathcal{S}_2$ constitué des séries S telles que la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$;

$\mathcal{S}_3$ constitué des séries S telles que la série entière de coefficients a_n ait un rayon de convergence au moins égal à 1 et que de plus sa somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définisse sur $]-1, 1[$ une fonction f ayant dans $\mathbb{C}$ une limite, notée ℓ, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I

1°/ Etudier, du point de vue de l'appartenance à $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, la série S_1 de terme général $a_n = (-1)^n$.

2°/ Etudier, du point de vue de l'appartenance à $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, la série S_2 de terme général $a_n = (-1)^{n+1} n$.

3°/ Etablir l'inclusion $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$.

4°/ Soit $S \in \mathcal{S}_2$.

a) Etablir la convergence pour tout $x \in]-1, 1[$ de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n x^n$ puis de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$. En déduire une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ à l'aide de la somme $g(x)$ de la première de ces séries entières.

b) Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_3$ et que, lorsque x tend vers 1, f a pour limite la limite σ de la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5°/ Résumer, en termes d'inclusions entre $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, les résultats obtenus jusqu'ici. Comment ces résultats se modifient-ils si l'on se restreint aux séries S à termes a_n positifs ou nuls ?

II

Dans cette partie, on considère une série S fixée, *appartenant à* $\mathcal{S}_3$, de terme général *réel* a_n et telle qu'il existe un réel A vérifiant l'inégalité $n\,a_n \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, tous les polynômes envisagés seront à coefficients réels. Enfin, dans le calcul de x^n pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on conviendra que $0^0 = 1$.

1°/ a) Soit $p(X) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k X^k$ un polynôme de valuation strictement positive.

.../...

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, p(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de sa somme à l'aide de ℓ et d'une valeur prise par p en un point qu'on précisera.

b) Soit $q(X) = \sum_{k=0}^{d'} \beta_k X^k$ un polynôme. Monter que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n)$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et calculer, lorsque x tend vers 1, la limite de $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n)$ à l'aide d'une intégrale portant sur q.

2°/ On *admet* que pour toute fonction φ numérique continue sur $[0, 1]$ il existe une suite de polynômes convergeant vers φ uniformément sur $[0, 1]$. En déduire que pour toute fonction ψ numérique continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ et admettant une limite à gauche au point $\frac{1}{2}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes q_1 et q_2 tels que
$q_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant q_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ avec $\int_0^1 [q_2(x) - q_1(x)]\, dx \leqslant \varepsilon$.

3°/ Soit χ la fonction égale à 1 sur $[\frac{1}{2}, 1]$ et nulle sur $[0, \frac{1}{2}[$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$ converge uniformément sur tout intervalle compact inclus dans $[0, 1[$.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux polynômes p_1 et p_2, de valuations strictement positives, tels que $p_1(1) = p_2(1)$ et que
$p_1(x) \leqslant \chi(x) \leqslant p_2(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ avec $\int_0^1 \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}\, dx \leqslant \varepsilon$.

c) Etablir que pour x appartenant à $[0, 1[$ et assez proche de 1, les différences

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_2(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$$

sont toutes deux majorées par $(A + 1)\varepsilon$, et en déduire la convergence de la série S.

d) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x^n)$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

4°/ a) Soit S_3 une série appartenant à $\mathcal{S}_3$, de terme général réel b_n et telle qu'il existe un réel B vérifiant l'inégalité $nb_n \geqslant B$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La série S_3 converge-t-elle ?

b) Existe-t-il une telle série S_3, qui vérifie en outre la condition $\sup_{n \in \mathbf{N}} nb_n = +\infty$?

c) Soit S_4 une série appartenant à $\mathcal{S}_3$, de terme général complexe c_n et telle qu'il existe un réel C vérifiant l'inégalité $|nc_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La série S_4 converge-t-elle ?

d) Existe-t-il une série S_5 appartenant à $\mathcal{S}_1$, de terme général réel d_n et telle que $\sup_{n \in \mathbf{N}} nd_n = -\inf_{n \in \mathbf{N}} nd_n = +\infty$?

-FIN-

I

1°) NOUS OBSERVONS, POUR TOUT CE QUI SUIT, que si : $a_n = O(n^p)$, $(p \in \mathbb{N})$, LE RAYON DE CONVERGENCE de $\sum a_n z^n$ est ≥ 1 (donc ici égal à un).
En effet, si : $0 \leq r < 1$, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M n^p$, donc : $|a_n r^n| \leq M n^p r^n$ et $\sum n^p r^n$ converge avec d'Alembert □

Cela dit :

$$\left.\begin{array}{l} * \ \sum a_n \text{ diverge, donc } \underline{(a_n) \notin \mathcal{S}_1} \\ * \ s_n = 1 + (-1)^n, \text{ donc } \sigma_n = \frac{1}{n+1}(n+1+1+(-1)^n) \end{array}\right\} (*) \text{, et}$$

de ce fait : (σ_n) converge vers 1, $\underline{(a_n) \in \mathcal{S}_2}$

* Enfin, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n$, donc :
$\exists \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$, et : $\underline{(a_n) \in \mathcal{S}_3}$

*) **CONSEIL** : NE PAS PERDRE DE TEMPS SUR DES RÉSULTATS VRAIMENT ÉVIDENTS, Tels ceux signalés.

2°) * Clairement, $\underline{(a_n) \notin \mathcal{S}_1}$: la suite $\frac{a_n}{n+1}$ ne tend pas vers 0.

* Montrons ensuite par récurrence que : $S_n = (-1)^{n}\left[\frac{n+1}{2}\right]$
ce résultat étant vrai pour $n = 0$, supposons : $S_n = (-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$

Si $\underline{n \text{ est pair}}$, $S_n = -\frac{n}{2}$, $S_{n+1} = -\frac{n}{2} + (-1)^{n+2}(n+1) = \frac{n}{2} + 1 = \left[\frac{(n+1)+1}{2}\right]$

Si $\underline{n \text{ est impair}}$, $S_n = +\frac{n+1}{2}$, $S_{n+1} = \frac{n+1}{2} - (n+1) = -\left[\frac{(n+1)+1}{2}\right]$

On constate de même par récurrence que :

$$\left\{\begin{array}{ll} \sigma_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2} & \text{pour } n \text{ impair} \\ \sigma_n = 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{array}\right. \quad \underline{(a_n) \notin \mathcal{S}_2}$$

(NB IL EST INUTILE DE RÉPÉTER DEUX FOIS LA RÉCURRENCE)

** Remarquons ensuite que : $\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$

donc : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^n = \frac{x}{(1+x)^2}$, admet la limite $\frac{1}{4}$ lorsque x tend vers 1^-, $\underline{(a_n) \in \mathcal{S}_3}$

4°) (σ_n) est bornée car convergente, donc $(n+1)\sigma_n = O(n)$; (avec 1°) La série $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence ≥ 1.

(I) Comme $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, le produit de $\sum s_n x^n$ par $\frac{1}{1-x}$ est $\sum (n+1)\sigma_n$ lorsque ces deux séries sont AC.

Comme : $s_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = O(n)$, $\sum s_n x^n$ et $\sum (n+1)\sigma_n x^n$ converge sur $]-1,1[$ et de ce fait :

$$(\forall x \in]-1,1[)\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n\right)\times\frac{1}{1-x} = g(x)\right) \quad (1)$$

On prouve de même que :

- $\sum a_n x^n$ converge absolument pour x dans $]-1,1[$.
- $(\forall x\in]-1,1[)\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\times \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n\right)$.

Avec (1) et (2) il vient : $(\forall x\in]-1,1[)\left(f(x) = (1-x)^2 g(x)\right)$ (3)

b) Écrivons : $\sigma_n = \sigma + \varepsilon_n$, avec : $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$, et donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Il vient, pour $x \in]-1,1[$:

$$(1-x)^2 g(x) = \left(\sigma\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right)\times(1-x)^2 + (1-x)^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varepsilon_n x^n.$$

et $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1-x)^{-2}$.

De là : $(1-x)^2 g(x) = \sigma + (1-x)^2\sum_{n=0}(n+1)\varepsilon_n x^n$.

Choisissons $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$, il vient : $\left|(1-x)^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varepsilon_n x^n\right| \leq (1-x)^2\left|\sum_{n=0}^{n_\varepsilon}(n+1)\varepsilon_n x^n\right| + \varepsilon(1-x)^2\underbrace{\sum_{0}^{+\infty}(n+1)x^n}_{(1-x)^{-2}}$ pour $x \geq 0$, et donc :

$$(\forall x\in [0,1[)\left(\left|(1-x)^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\varepsilon_n x^n\right| \leq \varepsilon + (1-x)^2 P(x)\right),$$

P étant le polynôme : $\sum_{0}^{n_\varepsilon}(n+1)\varepsilon_n x^n$. Comme : $\exists \lim_{x\to1}(1-x)^2P(x) = 0$, nous pouvons trouver $\eta > 0$ tel que : $(\forall x\in]1-\eta,1[)\left(|(1-x)^2P(x)| < \varepsilon\right)$,

résumons : $(\forall x\in [1-\eta,1[)\left(|f(x)-\sigma| < 2\varepsilon\right)$ (cf (3))

ce qui montre que : $(a_n)\in\mathcal{S}_3$ □

(CELA SERA SANS DOUTE, UN JOUR, UN EXERCICE D'ORAL)

) Après de nombreux essais, on introduit : $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{X(x)}{x} - 1\right)$, qui vérifie les hypothèses de 2°).

Il existe donc deux polynômes q_1, q_2 tels que :

$q_1 \leq \varphi \leq q_2$ et $\int_0^1 (q_2 - q_1) < \varepsilon$. De là :

$$\underbrace{x(1-x)q_1 + x}_{P_1} \leq X \leq \underbrace{x(1-x)q_2 + x}_{P_2}, \text{ avec :}$$

$$\int_0^1 \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}\,dx = \int_0^1 q_2 - q_1 \leq \varepsilon \quad \square$$

c) Soit q le polynôme : $q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}$ [licite avec b)]

Avec 1°) b), $(1-x)\sum_1^{+\infty} x^n q(x^n) = (1-x)\sum_0^{+\infty} \frac{P_2(x^n) - P_1(x^n)}{1-x^n}$ tend vers $\int_0^1 q(x)dx \leq \varepsilon$ lorsque x tend vers 1^- (1)

On note ensuite que : $na_n \leq A$ pour tout n et $0 \leq -P_1(x^n) + X(x^n) \leq P_2(x^n) - P_1(x^n)$

entraîne : $\sum_0^{+\infty} a_n \cdot X(x^n) - \sum_0^{+\infty} a_n P_1(x^n) \leq A \sum_1^{+\infty} \frac{P_2(x^n) - P_1(x^n)}{n}$ (2)

Enfin, si $x \in [0,1[$: $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \dots + x^{n-1}) \leq n(1-x)$, donc

(3) $\sum_1^{+\infty} (1-x)\frac{(P_2(x^n) - P_1(x^n))}{n(1-x)} \leq \sum_1^{+\infty} (1-x)\frac{P_2(x^n) - P_1(x^n)}{1-x^n}$

Avec (1) nous pouvons trouver $\alpha > 0$ tel que :

$\forall x \in [1-\alpha, 1[$, $A\sum_0^{+\infty} \frac{P_2(x^n) - P_1(x^n)}{n} \leq (A+1)\varepsilon$, d'où la première inégalité d'après (2) : $\forall x \in [1-\alpha, 1[$, $\sum_0^{+\infty} a_n X(x^n) - \sum_0^{+\infty} a_n P_1(x^n) \leq (A+1)\varepsilon$

On obtient immédiatement l'autre inégalité :

Convergence de S : Avec II - 1°) - a), $\sum_0^{+\infty} a_n P_i(x^n)$ tend vers $SP_i(1) = S$ lorsque x tend vers 1. On peut donc trouver $\beta \in]0, \alpha[$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in [1-\beta, 1[, & \sum_0^{+\infty} a_n X(x^n) \leq S + (A+2)\varepsilon \\ \forall x \in [1-\beta, 1[, & -\sum_0^{+\infty} a_n X(x^n) \leq -S + (A+2)\varepsilon \end{cases}$$

Donc, si $m \geq \left[-\frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log}(1-\beta)}\right] + 1$, et $x = \exp\left(-\frac{\operatorname{Log} 2}{m}\right)$, on a :

$x \in [1-\beta, 1[$ et $S - (A+2)\varepsilon \leq \sum_0^{+\infty} a_m X(x^m) = \sum_0^{m} a_m \leq S + (A+2)\varepsilon$

d'où le résultat $\square$

d) OUI. Appliquons le critère de Cauchy à S : Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq : $\forall m > n \geq n_\varepsilon$, $\left|\sum_{n+1}^{m} a_p\right| < \varepsilon$

Alors si $x \in [0,1]$, et $m > n \geq n_\varepsilon$, $\sum_n^m a_p X(x^p)$ est vide $(= 0)$ ou de la forme $\sum_n^r a_k x^k$, $n \leq r \leq m$, et par une évidente transformation d'Abel : $\left|\sum_n^r a_k x^k\right| \leq \varepsilon$ pour tout $\begin{cases} x \in [0,1] \\ m > n \\ n \geq n_\varepsilon \end{cases}$ $\square$

5°) On a : $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ (3°)
$\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_3$ (5°)

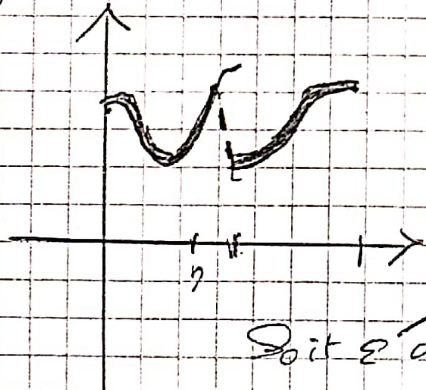
Mais $\mathcal{S}_1 \not\subset \mathcal{S}_2$ (1°) et $\mathcal{S}_2 \not\subset \mathcal{S}_3$ (3°)

II On suppose $A > 0$, ce qui ne nuit pas à la généralité

1°) Pour tout n de $\mathbb{N}$, k de $\mathbb{N}$ et tout x de $]-1,1[$: $x^{kn} \in]-1,1[$,
et $f(x^k) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{kn}$, donc par C.L. de séries convergentes :
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_k f(x^k)$ converge.
De plus, le théorème de composition des limites usuel permet d'affirmer que : $\exists \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0} a_n P(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k l = l\, P(1)$ $\square$

2°) q est bornée sur $[-1,1]$ donc la suite $n \to q(x^n)$ l'est aussi pour $x \in]-1,1[$, par suite : $\sum x^n q(x^n)$ est absolument convergente.
Pour $k \in \mathbb{N}$, $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(1+k)n} = (1-x) \times \frac{1}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1+x+\dots+x^{k-1}+x^k}$
donc si : $q(x) = x^k$, $\exists \lim_{x\to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \frac{1}{k+1}$
Par combinaison linéaire : $\exists \lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \sum_{k=0}^{d} \frac{\beta_k}{k+1} = \int_0^1 q(t)$

2°) Ce n'est pas si simple ! Il faut "décaler" un peu les fonctions continues à approcher.



– Si f est continue, la preuve suit la preuve ci-dessous, avec des simplifications évidentes. On pose : $M = \|f\|_\infty$ (≥ 0)
Supposons par exemple : $f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{2})$
Soit ε' dans $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $0<\eta<\frac{1}{2}$ tel que : $\eta < \frac{\varepsilon'}{M+1}$ * Soit g la fonction telle que :

$$\begin{cases} g|_{[0,\frac{1}{2}-\eta]} = f|_{[0,\frac{1}{2}-\eta]}, \quad g|_{[\frac{1}{2},1]} = f|_{[\frac{1}{2},1]} \\ \text{et enfin : } g \text{ est affine sur } [\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

Il est clair que : g est continue.
Nous pouvons de plus choisir η de sorte que :
(i) $\forall x \in [\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}[$, $|f(x) - f(\frac{1}{2}-\eta)| < \varepsilon'$

et (ii) $f(\frac{1}{2}-\eta) > f(\frac{1}{2})$ [ceci avec : $f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{2})$]

De là : (ii) $\Rightarrow$ g décroît sur $[\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}]$ puis :

(i) $\Rightarrow$ $\forall x \in [\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}[$, $g(x) - \varepsilon' \leq f(\frac{1}{2}-\eta) < f(x)$

** Cela fait, nous obtenons g continue telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1], & g(x) - 2\varepsilon' < f(x) - \varepsilon' \quad (\circ) \\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}-\eta] \cup [\frac{1}{2}, 1], & f(x) - 2\varepsilon' = g(x) - 2\varepsilon' \quad (\circ\circ) \end{cases}$$

Soit, avec Stone – Weierstrass, P_1 un polynôme tel que :

$\| g - P_1 \|_\infty < \varepsilon'$, il vient : $P_1 < f$ avec $(\circ)$

*** On construit de même h $\mathcal{C}^0$ et $\eta' < \frac{\varepsilon'}{M+1}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1], & f(x') + \varepsilon' < h(x) + 2\varepsilon' \\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}+\eta', 1], & f(x) = h(x) \end{cases}$$

Si P_2 est un polynôme tel que : $\| h + 2\varepsilon' - P_2 \| < \varepsilon'$

Il est alors clair que :

$$\forall x \in [0,1], \quad P_2(x) > f(x)$$

Nous sommes maintenant en mesure de conclure :

On a bien : $P_1 < f < P_2$, puis :

$$0 < \int_0^1 (P_2 - P_1) < \int_0^1 [(h + 3\varepsilon') - (g - 3\varepsilon')] = 6\varepsilon' + \int_0^1 (h - g)$$

$$0 < \int_0^1 (P_2 - P_1) < 6\varepsilon' + \int_{\frac{1}{2}-\eta}^{\frac{1}{2}} (f - g) + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\eta'} (h - f) < 6\varepsilon' + 2M\eta + 2M\eta' < 10\varepsilon'$$

Si : $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{10}$, le résultat est acquis □

3°) Si $x \in [0, \alpha]$, avec $\alpha < 1$, et $n_\alpha = \left[-\frac{\log \alpha}{\log 2}\right] + 1$,

on a, pour tout $n \geq n_\alpha$ et tout x de $[0, \alpha]$:

$0 \leq x^n < \frac{1}{2}$, donc : $\chi(x^n) = 0$, ainsi, le terme

général de la série $\sum a_n \chi(x^n)$ est nul sur $[0, \alpha]$

pour tout $n \geq n_\alpha$, donc celle-ci converge uniformément □

4°) a) Oui, il suffit d'appliquer le résultat de 3°) à $-a_n$.

b) oui : si $n = p^2$, $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \dfrac{1}{p^{3/2}}$

sinon, $a_n = 0$.

Alors : $a_n \geq 0$, $\sum_1 a_n$ converge donc avec I : $a_n \in \mathcal{S}_3$, enfin : $\lim n b_n = +\infty$

c) Immédiat en appliquant II - 3°) - c) à $\mathrm{Re}(c_n)$ et $\mathrm{Im}(c_n)$: $\sum_1 c_n$ converge □

d) oui : $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\mathrm{Log}\, n}$, $\sum_1 a_n$ converge moyennant Leibniz.

$$\gamma_{m+n} = \log\left(P(S_{m+n} \geq (m+n)u)\right)$$

$$\geq \log\left(P(S_m \geq mu)\, P(X_{m+1} + \cdots + X_{m+n} \geq nu)\right)$$

i

$\Uparrow$

ii $\Leftrightarrow$ iii

$$\geq \log(\Pi_m) + \log(\Pi_n) = \gamma_m + \gamma_n$$

$\Pi_n \longrightarrow$

$$P(S_n \geq nu) \longrightarrow 0$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n)} - 1\right|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \quad E$$